Leçon 106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de GL(E). Applications.

Rombaldi
Perrin

Dans la leçon, E désigne un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

I - Généralités sur le groupe linéaire

1. Définitions et premières propriétés

Définition 1.1 On appelle groupe linéaire l'ensemble des $\mathbb{K}$ - automorphismes de E sur lui-même et on le note $GL(E)$. Cet ensemble est muni d'une structure de groupe pour la loi de composition.

Définition 1.2 Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on définit $GL_k(\mathbb{K})$ comme le groupe des automorphismes de $\mathbb{K}^k$, canoniquement isomorphe à l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_k(\mathbb{K})$.

Proposition 1.3 Le choix d'une base de E induit un isomorphisme de groupes de $GL(E)$ sur $GL_n(\mathbb{K})$.

Théorème 1.4 Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $u \in GL(E)$
(ii) $\ker u = \{0\}$
(iii) $\mathrm{Im}\, u = E$
(iv) $\mathrm{Rg}\, u = n$
(v) $\det u \neq 0$
(vi) u transforme toute base en une base
(vii) u admet un inverse à droite
(viii) u admet un inverse à gauche

Remarque 1.5 Cette caractérisation est propre à la dimension finie, comme le montre l'exemple de $u : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$, $P \longmapsto XP$.

Proposition 1.6 Lorsque $\mathbb{K}$ est un corps fini de cardinal $q = p^r$, le cardinal de $GL(E)$ vaut $\prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i)$.

2. Le groupe spécial linéaire

Définition 1.7 On définit $SL(E)$, le noyau de $\det : GL(E) \longrightarrow \mathbb{K}^*$. Il s'agit ainsi d'un sous-groupe distingué que l'on appelle le groupe spécial linéaire.

On définit de même $SL_n(\mathbb{K}) := \{ A \in GL_n(\mathbb{K}) \mid \det A = 1 \}$.

Proposition 1.8 Le groupe quotient $GL(E)/SL(E)$ est isomorphe à $\mathbb{K}^*$.

Théorème 1.9 On a : $Z(GL(E)) = \mathbb{K}^* . id$ et $Z(SL(E)) = \mu_n(\mathbb{K}) . id$.

Définition 1.10 On définit le groupe projectif linéaire et le groupe spécial projectif linéaire comme étant : $PGL(E) = GL(E)/\mathbb{K}^*.id$ et $PSL(E) = SL(E)/\mu_n(\mathbb{K}).id$ bien définis car le centre d'un groupe est distingué.

Proposition 1.11 (Isomorphismes exceptionnels)

(i) $PGL_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{S}_3$ et $PSL_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathcal{A}_4$
(ii) $PGL_2(\mathbb{F}_4) = PSL_2(\mathbb{F}_4) \simeq \mathcal{A}_5$
(iii) $PGL_2(\mathbb{F}_5) \simeq \mathfrak{S}_5$ et $PSL_2(\mathbb{F}_5) \simeq \mathcal{A}_5$

3. Générateurs

Définition 1.12 Soit φ une forme linéaire non nulle sur E. On appelle transvection d'hyperplan $\ker \varphi$ tout $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par $u : x \in E \longmapsto x + \varphi(x)a$ avec $a \in \ker \varphi$.

Théorème 1.13 Soit $u \in \mathcal{L}(E) \setminus \{0\}$ alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) u est une transvection
(ii) la matrice de u dans une base de E est $T_n = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-2} & 0 \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix} \end{array}\right)$
(iii) $\mathrm{Rg}(u - id) = 1$ et $\chi_u(X) = (X-1)^n$
(iv) la matrice de u dans une base de E est $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$, $i \neq j$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$

Définition 1.14 Soit $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$. On appelle dilatation d'hyperplan $\ker \varphi$ tout $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par : $u : x \longmapsto x + \varphi(x)a$, $a \in E \setminus \ker \varphi$.

Une dilatation est dans $GL(E)$ si et seulement si $\lambda = 1 + \varphi(a) \neq 0$, λ est appelé le rapport de la dilatation.

Théorème 1.15 Un automorphisme u est une dilatation de rapport λ si et seulement si, il existe une base dans laquelle la matrice de u est $D_n(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots_1 & \\ (0) & & \lambda \end{pmatrix}$

Proposition 1.16 (Opérations élémentaires) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on définit les opérations élémentaires :

$AT_{i,j}(\lambda)$: $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$	$AD_i(\lambda)$: $C_i \leftarrow \lambda C_i$
$T_{i,j}(\lambda)A$: $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	$D_i(\lambda)A$: $L_i \leftarrow \lambda L_i$

Proposition 1.17 Le groupe $GL(E)$ est engendré par les transvections et les dilatations, le groupe $SL(E)$ est engendré par les transvections.

II - Topologie du groupe linéaire

Dans ce paragraphe, on se place dans le cadre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Contexte 2.1 En notant $\mathcal{L}(E)$ les applications linéaires (donc continues car en dimension finie), on peut le munir de la norme subordonnée définie par : $\|u\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$, qui en fait un espace de Banach.

Lemme 2.2 Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|u\| < 1$, l'endomorphisme $id - u$ est dans $GL(E)$ d'inverse $\sum_{k=0}^{+\infty} u^k$.

Théorème 2.3 L'espace $GL(E)$ est un ouvert dense de $\mathcal{L}(E)$ (cet élément reste vrai en dimension infinie). De plus, $GL(E)$ est dense dans $\mathcal{L}(E)$ et l'application $u \in GL(E) \longmapsto u^{-1}$ est continue.

Théorème 2.4
(i) $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe
(ii) $SL_n(\mathbb{C})$ est connexe
(iii) $SL_n(\mathbb{R})$ est connexe

Théorème 2.5 (de Burnside) Soit G un sous-groupe d'exposant fini de $GL_n(\mathbb{C})$. Alors G est fini.

développement 1

Remarque 2.6 Ce résultat reste vérifié dans $GL_n(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K}$ est algébriquement clos et de caractéristique nulle.

Théorème 2.7 Pour $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace euclidien, $O(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonal est un sous-groupe compact de $GL(E)$.

Théorème 2.8 Soit $u \in O(E)$. Il existe alors une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & (0) & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & (0) & & & & & R_{\theta_1} & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & R_{\theta_k} \end{pmatrix} \quad \text{avec } R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$$

Corollaire 2.9 groupe spécial orthogonal $SO(E)$ est connexe par arcs.

Théorème 2.10 (décomposition polaire) L'application $O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ définie par $(O, S) \longmapsto OS$ est un homéomorphisme.

développement 2